Teoría de Números

Luis José Blas Moreno Garrido
Estudiante de Matemáticas y Economía
luisjoseblas@terra.es

1.- INTRODUCCIÓN

De todas las ramas de las matemáticas, ninguna parece tan natural como la teoría de números. Los números, aunque parezcan inocentes, son el origen de algunos de los más profundos e intricados problemas de las matemáticas. Daremos algunos ejemplos de problemas abiertos sobre este tema. La conjetura de Goldbach[1] afirma que todo número entero par puede escribirse como suma de dos números primos y todo número impar como suma de tres números primos. Otra conjetura es la que dice que entre un número y su doble siempre existe un número primo. En este artículo hablaremos de otro gran secreto matemático: los números perfectos. Antes de continuar definiremos el concepto de número por defecto, número perfecto y número por exceso.

2.- DEFINICIONES PREVIAS

Definición 1.- Se conoce como divisores propios de un número n natural al conjuntos de todos los divisores de n excepto el propio n. Representamos la suma de los divisores propios de n con #(n)
Definición 2.- Decimos que un número n natural es por defecto si $\#(n) < n$
Definición 3.- Decimos que un número n natural es por exceso si $\#(n) > n$
Definición 4.- Decimos que un número n natural es perfecto si $\#(n) = n$

Vamos a dar unos ejemplos:
15 es un número por defecto, ya que $\#(15) = 1 + 3 + 5 = 9 < 15$
24 es un número por exceso, ya que $\#(24) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 = 36 > 24$
28 es un número perfecto, ya que $\#(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$
2^n, con n natural, es un número por defecto, ya que $\#(2^n) = 1 + 2 + ...+ 2^{n-1} = 2^n - 1 < 2^n$

Definición 5.- A los números que cumplen la propiedad que la suma de sus divisores propios suman una unidad menos que el propio número se les conoce como números débilmente por defecto. Formalmente, un número natural n se dice que es débilmente por defecto si $\#(n) = n - 1$. Análogamente, a los números cuyo divisores propios suman una unidad más que el propio número, es decir, que $\#(n) = n + 1$ se les conoce como números débilmente por exceso.

Se conocen muchos números débilmente por defecto, como por ejemplo 2^n con n natural. Como ejercicio para el lector, podría encontrar algún número débilmente por defecto que no sea de la forma 2^n o probar que todo número débilmente por defecto es necesariamente de la forma 2^n para algún n natural.
No se conoce ningún número que sea débilmente por exceso. Tampoco se ha probado que no exista ninguno. Esta vez no pediré al lector que pruebe esto.
Se podría pensar que considerar el 1 como divisor propio carece de interés, ya que 1 divide a cualquier número natural. Si no consideramos la unidad en la definición de #(n), no tendríamos ejemplos de número perfectos y no podríamos continuar con este artículo.
Los números 6, 28, 496 y 8.128 eran los cuatro únicos números perfectos que se conocían en la antigua Grecia, también sabían que no había ningún número perfecto además de éstos menor que 10.000. Efectivamente, el quinto número perfecto es 33.550.336.
Junto al sentido matemático de los números perfectos, estos siempre han llevado asociado un sentido filosófico. El 6 es el primer número perfecto. En muchas culturas el 6 tenía un significado especial. Para los antiguos griegos el número 6 representaba la perfecta unión de los dos sexos, porque $6 = 3 \cdot 2$, donde el 3 es un número masculino y dos es femenino (por razones que deben ser evidentes excepto para los que ignoran la anatomía). El 6 también tiene importancia en la religión, se dice que Dios creó el mundo en 6 días y que el séptimo descansó. El 28 también está relacionado con el ciclo de la luna y muchos fenómenos de la naturaleza se rigen por ella.

Definición 6.- Se dice que el par de números n y m, son amigos si $\#(n) = m$ y $\#(m) = n$.

Se puede ver que un número perfecto siempre es amigo de si mismo. Cuando hablamos de una pareja de número amigos, supondremos que son distintos. Hasta el nacimiento de Euler[2] tan solo se conocían tres parejas de números amigos. La pareja más pequeña es 220 y 284. Euler propuso 60 nuevas parejas, de las cuales 59 eran correctas.
Ahora vamos a dar la definición de la función φ(n) de Euler, la cual nos permitirá calcular número perfectos y amigos más rápidamente[3].

---

[1] Christian Goldbach (1690-1764) fue profesor de matemáticas en San Petersburgo antes de marchar a Moscú para ejercer como tutor del zar Pedro III. Hizo importantes trabajos en la teoría de números, pero es recordado por su conjetura.
[2] Ver articulo "Historia del concepto de función"
[3] Computacionalmente hablando

Definición 7.- Definimos la función φ de Euler como la suma de los divisores de n. De forma más compacta, escribimos

$$\varphi(n) := \sum_{d|n} d$$

3.- TEOREMAS

Teorema 1.-

i) Un número n natural es por defecto si y sólo si $\varphi(n) < 2n$
ii) Un número n natural es por exceso si y sólo si $\varphi(n) > 2n$
iii) Un número n natural es perfecto si y sólo si $\varphi(n) = 2n$
iv) Dos número n y m son amigos si y sólo si $\varphi(n) = m + n = \varphi(m)$
Demostración: Únicamente hay que ver que $\varphi(n) = \#(n) + n$

La tarea de buscar números perfectos no es fácil, aunque hoy en día contamos con dos con herramientas que no tenían los antiguos griegos; los computadores y el teorema de Euclides[4] – Euler

Teorema 2 (Teorema de Euclides).-

Si $2^k -1$ es primo, entonces $2^{k-1} \cdot (2^k -1)$ es un número perfecto.
Demostración:
Llamamos $p = 2^k -1$ y $n = 2^{k-1} \cdot (2^k -1) = p \cdot (2^{k-1})$.
Los únicos divisores propios de n son $1,2,4,... ,2^{k-1},p, 2p, 4p, ..., 2^{k-2} \cdot p$ y por tanto,
$\#(n) = 1 + 2 + 4 +...+ 2^{k-1} + p + 2p + 4p +...+ 2^{k-2}\cdot p = 2^k-1 + p \cdot (2^{k-1}-1) = p + p\cdot 2^{k-1} - p = p\cdot 2^{k-1} = n$.
Como $\#(n) = n$, n es un número perfecto.

Euclides nos da una condición suficiente para que un número sea perfecto, es decir, que nos dice una manera de encontrar números perfectos. Si encontramos un número primo de la forma $p = 2^k -1$, habremos encontrado un número perfecto aplicando del Teorema de Euclides. A los números primos de esta forma se les conoce como primos de Mersenne[5].

No estamos diciendo que sea la única manera de encontrar número primos. Si esto fuera cierto, el problema de encontrar números perfectos, estaría sustituido por el problema de buscar números primos de Mersenne.

Teorema 3.-

Si $p = 2^k -1$ es un primo de Mersenne entonces k es un número primo.
Demostración:
Probaremos que si k no es primo, entonces $p = 2^k -1$ no es un primo de Mersenne. Sea $k = a \cdot b$, entonces $p = 2^k -1= (2^a)^b-1 = [2^a -1] \cdot [(2^a)^{b-1}+ (2^a)^{b-2}+ (2^a)^{b-3}+...+ (2^a)+1]$ y por lo tanto p no es primo ya que tiene a $2^a -1$ como factor.

Si el reciproco del problema fuera cierto, el problema de encontrar primos de Mersenne se reduciría al problema de encontrar número primos, pero desgraciadamente esto no ocurre así. El contraejemplo más pequeño lo tenemos para k = 11, ya que $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ que no es primo.

En 1.772 Euler descubrió que $2^{31}-1$ era un número primo y por lo tanto $2^{30} \cdot (2^{31}-1) = 2.305.843.008.139.952.128$ es un número perfecto. Hasta ahora sólo se conocen 39 primos de Mersenne. El más grande es $2^{13.466.917}-1$. Tiene más de 4 millones de dígitos y fue descubierto el 14 de Noviembre de 2.001 por Michael Cameron de Canadá cuando sólo tenía 20 años. Lo halló con una computadora AMD a 800 MHz, siendo partícipe del proyecto GIMPS. Utilizando el Teorema de Euclides, podemos asegurar que $(2^{13.466.916}) \cdot (2^{13.466.917}- 1)$ es un número perfecto. No escribo el número con todos sus dígitos porque tiene exactamente 8.107.892 dígitos[6] y ocuparía unas 730 veces lo que ocupa este artículo.

Para probar que hay infinitos número perfectos, sería suficiente con probar que hay infinitos primos de Mersenne, pero esto está aún fuera del alcance de los matemáticos.

Sería natural ahora preguntarnos si todo número perfecto tiene que ser necesariamente de la forma $2^{k-1} \cdot (2^k -1)$ con $2^k -1$ primo. El problema todavía está abierto, pero Euler cerró el problema para los número perfectos pares. El siguiente Teorema aunque ya lo conjeturó Descartes[7] en una carta dirigida a Mersenne el 15 de Noviembre de 1.638, lo demostró Euler.

---

[4] **Euclides (matemático)** (300 a.C.), matemático griego, cuya obra principal, *Elementos de geometría,* es un extenso tratado de matemáticas en 13 volúmenes sobre materias tales como geometría plana, proporciones en general, propiedades de los números, magnitudes inconmensurables y geometría del espacio. Probablemente las secciones geométricas de los *Elementos* fueron en un principio una revisión de las obras de matemáticos anteriores, pero se considera que Euclides hizo diversos descubrimientos en la teoría de números. Los *Elementos* de Euclides se utilizaron como texto durante 2.000 años, e incluso hoy, una versión modificada de sus primeros libros constituye la base de la enseñanza de la geometría plana en las escuelas secundarias.

[5] **Marín Mersenne** (1588-1648) fue un padre franciscano que pasó la mayor parte de su vida en un convento de París. Fue teólogo, filósofo y compañero de clase y amigo de Descartes. Escribió algunos trabajos matemáticos.

[6] Calculado con Mathematica 3.0.

[7] **Descartes, René** (1596-1650), filósofo, científico y matemático francés, considerado el fundador de la filosofía moderna. Su contribución más notable a las matemáticas fue la sistematización de la geometría analítica. Fue el primer matemático que intentó clasificar las curvas conforme al tipo de ecuaciones que las producen y contribuyó también a la elaboración de la teoría de las ecuaciones. Fue el responsable de la utilización de las últimas letras del alfabeto para designar las cantidades desconocidas y las primeras letras para las conocidas. También inventó el método de los exponentes (como en x^2) para indicar las potencias de los números. Además, formuló la regla (conocida como ley cartesiana de los signos) para descifrar el número de raíces negativas y positivas de cualquier ecuación algebraica.

Teorema 4.-
Si n es un número perfecto y par, entonces $n = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$, donde $2^k - 1$ es un primo de Mersenne.
Demostración: La demostración de este teorema se puede encontrar en cualquier libro de teoría de números[8].

El problema que se nos plantea ahora es sobre los número perfectos impares. No se conoce todavía ningún ejemplo de ellos. Está claro, que en el caso de existir, el teorema anterior no sería aplicable ellos, que ya $n = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$ es par.

En un principio se podría pensar que todos los números impares son por defecto. Un número par, al que podemos llamar 2n, tiene a n como divisor propio, y el resto de divisores de 2n tan sólo han de sumar n para que deje de ser un número por defecto. Un número impar no tiene a su mitad como divisor propio, y ni si quiera su tercera parte necesariamente, etc.

Sin embargo #(945) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 15 + 21 + 27 + 35 + 45 + 63 + 105 + 135 + 189 + 315 = 975 > 945, es decir, 945 es un número impar y por exceso, por lo tanto no se puede descartar la existencia de número perfectos impares. El mismo Euler abordó este tema en un artículo en el año 1.747. En él dice que la existencia de números perfectos impares es la cuestión más difícil. Cuando Euler afirma que es de lo más difícil, uno puede estar seguro que lo es. Aunque todavía está el problema abierto, se han hecho muchos avances en este tema. Citaremos alguna propiedades de los número perfectos impares.

1.- Un número perfecto impar no puede ser divisible por 105.
2.- Un número perfecto impar ha de tener al menos 8 factores primos.
3.- Un número perfecto impar ha de se mayor que 10^{300}.
4.- El segundo mayor factor de un número perfecto impar ha de ser mayor que 1000.
5.- La suma de los inversos de los números perfectos impares es finita.

La quinta propiedad nos da una idea de la densidad de números perfectos impares. Sabemos que la suma de los inversos de los naturales es infinita. También es infinita la suma de los inversos de los número primos, sin embargo la suma de los inversos de los cuadrados de los números naturales converge. Esto nos indica que los cuadrados están más distanciados entre sí que los número primos.

Se puede pensar que obtener propiedades de algo que no se sabe si existe es una pérdida de tiempo. Si el conjunto de los número perfectos impares es vacío, cualquier propiedad que digamos sobre ellos será cierta. Sin embargo todas estas propiedades son las que posiblemente algún día nos den la respuesta que durante siglos se está buscando. Basta con que dos de estas propiedades de los números perfectos impares se contradigan para concluir la no existencia de los mismos.

4.- GENERALIZACIÓN DE LOS NÚMEROS POR DEFECTO, PERFECTOS Y POR EXCESO

Ahora vamos a generalizar los conceptos de número perfecto, número por exceso y número por defecto.

Definición 8.- Decimos que un número n natural es k-perfecto si $\#(n) = k \cdot n$. Análogamente decimos que un número n natural k-exceso si $\#(n) > k \cdot n$ y k-defecto si $\#(n) < k \cdot n$.

Definición 9.- Decimos que un número n natural es k-perfecto si $\varphi(n) = (k+1) \cdot n$. Análogamente decimos que un número n natural k-exceso si $\varphi(n) > (k+1) \cdot n$ y k-defecto si $\varphi(n) < (k+1) \cdot n$.

Las definiciones 8 y 9 son equivalentes. Para k = 1 tenemos las definiciones 2, 3 y 4. El problema consiste en dado un k natural, encontrar un número k-defecto, otro k-perfecto y otro k-exceso, es decir, ver que las definiciones 8 y 9 están bien definidas, en el sentido de que no son vacías.

Si un número n es k-defecto, también será j-defecto para todo j > k, en particular si n es por defecto (1-defecto) entonces será k-defecto para todo k natural. Análogamente, si un número n es k-exceso, también será j-exceso para todo j < k.

Dado un k natural, encontrar un número k-defecto es trivial. No probaré la existencia de números k-perfectos, pero sí que probaré la existencia de número k-exceso, de esta manera, mantendremos la esperanza de la existencia de números que sean k-perfectos. Para ello definiremos lo que es un número salchicha.

Definición 10.- Decimos que NS es un número salchicha si existe un n natural tal que NS es el mínimo común múltiplo de 1,2,3...,n. Lo representamos de la siguiente manera. NS(n) = m.c.m{1,2,3...,n}.

Los paquetes de salchichas, normalmente vienen una cantidad prima de salchichas, de esta manera es muy difícil dividir las salchichas entre un número de personas determinadas. Sabemos que son causas comerciales las que provocan esto. Lo ideal, desde el punto de vista matemático, es que un paquete de salchichas contuviera un número salchicha de salchichas, para poder repartirlas entre un número de personas determinadas sin partir ninguna. Daremos algunos ejemplos de números salchichas.

NS(1)=m.c.m{1}=1	NS(2)=m.c.m{1,2}=2	NS(3)=m.c.m{1,2,3}=6	NS(4)=m.c.m{1,2,3,4}=12
NS(5)=m.c.m{1,2,3,4,5}=60	NS(6)=m.c.m{1,2,3,4,5,6}=60	NS(7)=m.c.m{1,2,3,4,5,6,7}=420	NS(8)=m.c.m{1,2,3,4,5,6,7,8}=840

NS(9)=m.c.m{1,2,...,9}=2.520	NS(10)=m.c.m{1,2,...,10}=2.520	NS(11)=m.c.m{1,2,...,11}=27.720
NS(12)=m.c.m{1,2,...,12}=27.720	NS(13)=m.c.m{1,2,...,12}=360.360	NS(14)=m.c.m{1,2,...,15}=360.360
NS(15)=m.c.m{1,2,...,15}=360.360	NS(16)=m.c.m{1,2,...,16}=720.720	NS(17)=m.c.m{1,2,...,17}=12.252.240
NS(18)=m.c.m{1,2,...,18}=12.252.240	NS(19)=m.c.m{1,2,...,19}=232.792.560	NS(20)=m.c.m{1,2,...,20}=232.792.560

[8] Ver el Libro: Euler, el matemático de todos los matemáticos. Autor: William Dunham; prólogo y comentarios de Antonio Pérez Sanz

Aunque la definición 9 parezca algo novedosa, se trata de números con los que estamos muy familiarizados, y muchos de ellos corresponden a patrones de medida. Por ejemplo, los relojes tiene 12 horas y las horas 60 minutos. La idea fundamental es que se trata de números con muchos divisores propios, y por lo tanto son buenos para tomarlos como patrones de medida.

A continuación pondremos un resultado que seguramente no encontrareis en los libros de textos.

Teorema 5.- Sea k un número natural dado. Entonces, existe un número salchicha que es k-exceso.

Demostración: Sabemos que la suma de los inversos de los números naturales diverge. Según la definición, estamos diciendo que para todo k natural, existe n_0 tal que

$$\sum_{i=2}^{n_0} \frac{1}{i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n_0} > k$$

Sea N = NS(n_0) = m.c.m{1,2,3..., n_0}. Con seguridad, 2, 3, 4...., n_0 dividen a N y por lo tanto:

$$\#(N) \geq \frac{N}{2} + \frac{N}{3} + \frac{N}{4} + \ldots + \frac{N}{n_0} = N \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n_0}\right] > N \cdot k$$

Luego N es un número k exceso.

Para la demostración únicamente hemos utilizado la definición de divergencia de la serie armónica. Este teorema se puede generalizar. Primero generalizamos la definición de número salchicha.

Definición 11.- Sea $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,..,a_{n,....}\}$ una sucesión de número naturales. Definimos NS(n) asociado a la sucesión $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,..,a_{n,..}\}$ como NS(n) = m.c.m$\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,..,a_n\}$.

Teorema 6.- Sea $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,..,a_{n,....}\}$ una sucesión de números naturales tal que la suma de sus inversos diverge. Entonces existe algún NS asociado a la sucesión $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,..,a_{n,....}\}$ que es k-exceso.

Demostración:

El argumento es igual que el teorema anterior. Dado un k natural existe un n_0 tal que

$$\sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{a_i} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n_0}} > k$$

Sea N = NS(n_0) = m.c.m$\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,..,a_{n_0}\}$. Con seguridad, a_1, a_2, a_3...., a_{n_0} dividen a N y por lo tanto,

$$\#(N) \geq \frac{N}{a_1} + \frac{N}{a_2} + \frac{N}{a_3} + \ldots + \frac{N}{a_{n_0}} = N \cdot \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n_0}}\right] > N \cdot k$$

Luego N es un número k-exceso.

Ya sabemos que dada una sucesión de numero naturales, una condición suficiente para que existan números salchichas asociados a dicha sucesión que sean k-exceso es que la suma de los inversos de los elementos de la sucesión sea divergente.

Seguro que algún lector se estará preguntando si la condición esta es también necesaria. Invito a los lectores a investiguen un poco sobre el tema.

Corolario.- Dado un k natural, existen un numero impar es que k-exceso.

Demostración: Consideremos la sucesión {1,3,5,7,...}. Está claro que la suma de sus inversos es divergente, ya que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} \geq \frac{1}{2} \sum_{I=1}^{n} \frac{1}{i}$$

Por lo tanto, dado un k natural, existe un n_0 natural tal que N = NS(n_0) = m.c.m {1,3,5,7,..., n_0} que es k-exceso.

5.- REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Título: Euler, el matemático de todos los matemáticos

Autor: William Dunham; prólogo y comentarios de Antonio Pérez Sanz