

Lo finito y lo no finito

Luis José Blas Moreno Garrido

Estudiante de Matemáticas y Economía

Universidad de Alicante

luisjoseblas@terra.es

Número finitos

En este artículo vamos a hablar sobre la noción matemática de lo finito e infinito y de algunas cosas que son difíciles de entender. El conjunto de todos los números finitos es el conjunto de los números naturales y se representa por \mathbb{N} . Sin embargo, este conjunto \mathbb{N} es un conjunto infinito. Es decir, que hay infinitos números finitos. Pondremos en manifiesto algunos ejemplos de cantidades finitas que son tan grandes que pueden escapar de nuestra imaginación.

Utilizaremos como ejemplo el ajedrez. Este juego se practica en un tablero de 64 casillas. No se sabe exactamente cuál es su origen. Se cree que surgieron juegos parecidos al ajedrez en distintos puntos del mundo hace ya muchos años. Una famosa historia es la siguiente. Un rey pidió a uno de sus siervos que le hiciera un juego. Éste le presentó el ajedrez y el rey quedó tan encantado que le dijo al siervo que le pidiera lo que quisiera. El siervo le dijo que quería un grano de trigo en la primera casilla del tablero, dos granos de trigo en la segunda, cuatro en la tercera, ocho en la cuarta, etc. El rey aceptó pensando que como mucho serían un par de sacos. En realidad le había pedido $1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{63} = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$ granos de trigo, es decir casi 18 trillones y medio. En cada kilogramo de trigo caben aproximadamente unos 28.220 granos, por lo que el resultado sería de unas 653.676.260.585 toneladas; que ocuparían un depósito en forma de cubo de algo más de 11.5 kilómetros de lado. Para producir tal cantidad de trigo se necesitaría estar cultivando la Tierra (incluidos los mares), durante ocho años. En esta historia, el rey acaba mandando cortar la cabeza de su siervo, al darse cuenta de su propia ignorancia.

Otro número que escapa de nuestra imaginación es el número de partidas de ajedrez diferentes que se pueden jugar. Para ver que este número es finito, primero hay que recordar la regla que dice que si en 50 movimientos no se captura pieza o no se mueve ningún peón, la partida acaba en tablas. Como tenemos 30 piezas que pueden ser capturadas (los reyes no pueden ser capturados durante una partida) y 96 posibles movimientos de peones (solo puede avanzar 6 casillas y hay 16 peones). Por lo tanto $(30+96) \times 50 = 6.300$ es el número máximo de jugadas que se puede hacer en una partida de ajedrez.

Ahora vamos a calcular una cota para los posibles movimientos en cada jugada.

Una cota bastante vasta es la que se obtiene de identificar un movimiento como una función $F : \{1,2,\dots,64\} \rightarrow \{1,2,\dots,64\}$. Esto es, un movimiento es mover de una casilla a otra, si $F(n) = n$ interpretamos que no se mueve ninguna pieza por que la partida ya ha acabado. Tenemos que, como máximo, se pueden hacer 64^{64} posibles movimientos diferentes en cada jugada (aunque la gran mayoría de estos sean ilegales).¹

Por tanto, el número $64^{64} \times 64^{64} \times \dots \times 64^{64}$ (6300 veces) $= 64^{403.200} = 2^{2.419.200}$ es mayor que el número de partidas de ajedrez diferentes. Este número tiene 728.251 cifras.

Se puede buscar una cota mucho mejor, pero encontrar la mejor, es un problema muy complicado.

En un sentido formal, como el juego del ajedrez es finito, se puede representar en forma de árbol, en el cuál cada nodo es una jugada. Sin embargo, este árbol es tan grande que ni si quiera un computador sería capaz de manipular tal cantidad de información.

Otro número muy grande es el googol². Un googol es 10^{100} . Como comenta Georges Ifrah "... En realidad, no hay ningún googol de nada. [...] rebasa todo lo que se pueda contar o medir en el mundo puramente físico". Se calcula que las partículas que componen el universo conocido no llegan a 10^{80} (menor que un googol), y si el espacio estuviese lleno de neutrones, los mismos ascenderían a 10^{128} .

Algunos dicen que el googol es el mayor número con nombre propio, pero no es cierto: los budistas tienen desde hace mucho más tiempo el "asankhyeya", que vale 10^{140} . Se define el Googolplex como 10^{googol} . Este número no se puede escribir de forma física, ya que tiene más ceros que las partículas que componen el universo.

La definiciones de googol y googolplex son del siglo XX, pero ya Arquímedes empezó a dar definiciones y clasificar números finitos (claro que no todos).

El sistema de numeración de Arquímedes estaba fundado en la miríada³ de miríadas, igual a 100.000.000, y se simboliza por Ω . Los números estaban divididos en períodos y cada período en "primos números", "segundos números", "terceros números", etc. hasta los Ω -ésimos números. En la tabla siguiente se describe la clasificación.

¹ En cada jugada se pueden hacer como máximo 137 movimientos (8 el rey, 27 la dama, 14 cada torre, 13 cada alfil, 8 cada caballo y 4 cada peón). Con esto, la cota se mejora hasta 137^{6300} que "sólo" tiene 13.462 dígitos.

² El nombre lo puso un niño de nueve años, sobrino del matemático Edward Kasne

³ Una miríada = 10.000 unidades

Primer Período	Segundo Período	Ω -ésimo Período
Primos números $1, 2, 3, \dots, \Omega$	Primos números $\Pi+1, \Pi+2, \dots, \Omega\Pi$	Primos números $\Pi^{\Omega-1}+1, \Pi^{\Omega-1}+2, \dots, \Omega\Pi^{\Omega-1}$
Segundos números $\Omega+1, \Omega+2, \dots, \Omega^2$	Segundos números $\Omega\Pi+1, \Omega\Pi+2, \dots, \Omega^2\Pi$	Segundos números $\Omega\Pi^{\Omega-1}+1, \Omega\Pi^{\Omega-1}+2, \dots, \Omega^2\Pi^{\Omega-1}$
Terceros números $\Omega^2+1, \Omega^2+2, \dots, \Omega^3$	Terceros números $\Omega^2\Pi+1, \Omega^2\Pi+2, \dots, \Omega^3\Pi$	Terceros números $\Omega^2\Pi^{\Omega-1}+1, \Omega^2\Pi^{\Omega-1}+2, \dots, \Omega^3\Pi^{\Omega-1}$
.....
n-ésimos números $\Omega^{n-1}+1, \Omega^{n-1}+2, \dots, \Omega^n$	n-ésimos números $\Omega^{n-1}\Pi+1, \Omega^{n-1}\Pi+2, \dots, \Omega^n\Pi$	n-ésimos números $\Omega^{n-1}\Pi^{\Omega-1}+1, \Omega^{n-1}\Pi^{\Omega-1}+2, \dots, \Omega^n\Pi^{\Omega-1}$
.....
Ω -ésimos números $\Omega^{\Omega-1}+1, \Omega^{\Omega-1}+2, \dots, \Omega^\Omega = \Pi$	Ω -ésimos números $\Omega^{\Omega-1}\Pi+1, \Omega^{\Omega-1}\Pi+2, \dots, \Omega^\Omega\Pi = \Pi^2$	Ω -ésimos números $\Omega^{\Omega-1}\Pi^{\Omega-1}+1, \Omega^{\Omega-1}\Pi^{\Omega-1}+2, \dots, \Omega^\Omega\Pi^{\Omega-1} = \Pi^\Pi$

El último número del primer período es $\Pi = 100.000^{100.000}$ que es un uno seguido de 400.000 ceros.

El último número del segundo período es $\Pi^2 = 100.000^{200.000}$ que es un uno seguido de 800.000 ceros.

El último número del Ω -ésimo período es Π^Π que es un uno seguido de $400.000 \times \Pi$ ceros.

Como al partir del primer período ya está definido Π , esta clasificación podría llegar hasta el período Π , e incluso hasta el período Π^Π . Sinceramente, el autor de este artículo cree que Arquímedes pensó que con estos números era “suficiente”. Como Π es mayor que un googol, es fácil ver que Π^Π es mayor que un googolplex (aunque no es tan fácil imaginarse este número).

A pesar de ser estos números tan grandes, hay infinitos números finitos más grandes que ellos, y cualquier número infinito es más grande que todos estos.

Números Infinitos

Cuando hablemos de números infinitos, nos vamos a referir a los cardinales⁴ de los conjuntos infinitos. La definición de un conjunto infinito es que es tiene los mismos elementos que un subconjunto propio⁵ de él. Por ejemplo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ que es el conjunto de los números finitos, es un conjunto infinito, ya que tiene los mismos elementos que $\{2, 4, 6, \dots\}$ ⁶ y $\{2, 4, 6, \dots\} \subset \mathbb{N}$. Para ver que tiene los mismos elementos no hay más que construir una función f biyectiva entre $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ y $\{2, 4, 6, \dots\}$. En este caso nos vale $f(n) = 2n$.

Para quienes no han estudiado algo sobre los conjuntos finitos, puede parecer que sólo existe un “infinito”. Cantor demostró que existen una infinidad de cardinales finitos. El conjunto de todos los subconjuntos de \mathbb{N} (denotado por $P(\mathbb{N})$ ⁷), también es infinito, sin embargo, es imposible encontrar una función biyectiva entre \mathbb{N} y $P(\mathbb{N})$. En cambio, sí que existe una función biyectiva entre \mathbb{N} y \mathbb{R} , siendo \mathbb{R} el conjunto de todos los números reales. En general, si A es un conjunto, $P(A)$ (las partes de A) es más grande que A .

Por eso siempre es posible encontrar un conjunto más grande que un conjunto ya dado. Como consecuencia de esto, se puede afirmar que no existe el Conjunto Universal (el conjunto de todos los conjuntos), ya que U fuera el Conjunto Universal, $P(U)$ es un conjunto más grande que U y por tanto no está en U . Estas afirmaciones chocan un poco con la intuición. Resulta que \mathbb{Q} , el conjunto de todos los números racionales, es igual de grande que \mathbb{N} , y por tanto menor que \mathbb{R} . Quienes no han visto la demostración, se podrían preguntar cómo puede ocurrir esto, si resulta que entre cada dos números reales siempre hay un racional. Recomiendo que se busque la demostración en un libro de fundamentos de matemáticas para salir del asombro. Otro ejemplo perturba la intuición es que el intervalo $[0, 1]$ es igual de grande que todo \mathbb{R} , e igual de grande⁸ que \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 y en general que \mathbb{R}^n . Como le dijo Cantor a Dedekind: “Lo veo, pero no lo creo”. Por si algún lector todavía no tiene suficiente con esto, vamos a mostrar la paradoja⁹ del hotel de Hilbert.

⁴ El cardinal de un conjunto es el número de elementos que tiene.

⁵ Un subconjunto propio de un conjunto A es cualquier subconjunto de A que no sea el propio A .

⁶ El conjunto $\{2, 4, 6, \dots\}$ también se representa como $2\mathbb{N}$.

⁷ $P(\mathbb{N}) = \{A : A \subset \mathbb{N}\}$ y se lee el conjunto de las partes de \mathbb{N} .

⁸ Decimos que dos conjuntos son igual de grandes si tiene el mismo cardinal.

⁹ Aunque se llame paradoja, no lo es en el sentido matemático de la palabra.

El Hotel de Hilbert.

El Hotel de Hilbert es un hotel infinito, cuyas habitaciones están numeradas con los enteros $0, 1, 2, \dots$. Resulta que el hotel está completo (cada habitación tiene un ocupante). Llega un viajero. “No hay problema”, le responde el recepcionista. “Instálese en la habitación 0. Yo le pediré a su ocupante que pase a la habitación 1, al que ocupa ésta, que pase a la habitación 2, y así sucesivamente. La recepción dispone, claro está, de un teléfono especial que permite telefonar simultáneamente a todas las habitaciones y solicitar al ocupante de la habitación n que pase a la habitación $n + 1$. El nuevo cliente ha podido ser alojado. Diez minutos más tarde llega un autocar (infinito y con los asientos números 0 el del conductor, $1, 2, 3, \dots$) con nuevos pasajeros que desean pasar la noche en el hotel. “No hay problema”, responde el recepcionista al conductor del autocar. Recurre de nuevo a su teléfono especial para pedir al ocupante de la habitación n que se mude a la de número $2n$. Después de indicar al conductor del autocar que el viajero número i de su vehículo debe ir a la habitación $2i + 1$ (que ha quedado efectivamente libre, pues todas las habitaciones de número impar han sido desalojadas). Como estamos en temporada alta, media hora más tarde llega un grupo de una infinidad de autocares, cada uno de ellos con infinitos viajeros. “No hay problema, enseguida lo arreglo”, responde el recepcionista. Telefona al huésped de la habitación i y le ruega que se mude a la $2i + 1$ (lo que deja libre todas las habitaciones impares) y le da al responsable del grupo de autocares la siguiente instrucción: “El pasajero número i del autocar j , debe ocupar la habitación $2^{j+1} (2i + 1)$. Todo va bien, pues nunca les es asignada una misma habitación a distintos viajeros.

Números hiperinfinitos

Igual que en el apartado anterior, hablamos de un número hiperinfinito cuando se trata del cardinal de un conjunto hiperinfinito. Un conjunto hiperinfinito es un conjunto que es autosemejante a un subconjunto propio. Autosemejante quiere decir que además de ser igual de grande, tiene que conservar todas las demás estructuras¹⁰ del conjunto total. Por ejemplo, \mathbb{N} no es hiperinfinito. La función biyectiva $f(n) = 2n$ construida en el apartado anterior no nos vale en este caso, porque se cumple por ejemplo que $5 \times 6 = 30$, pero sin embargo no se cumple que $f(5) \times f(6)$ sea igual a $f(30)$ ($10 \times 12 \neq 60$). En este caso no se conserva la estructura del producto. Se ha demostrado que no existe ninguna función biyectiva que conserve todas las propiedades de \mathbb{N} .

Este tema está todavía por explorar. Se empezó a estudiar a principios de los años 70 del siglo pasado y todavía no se ha encontrado ningún conjunto hiperinfinito.

Me gustaría acabar este artículo con una frase de Alphonse Allais. “El infinito se hace largo, sobre todo hacia el final”

BIOGRAFIA

Revista Investigación y Ciencia (Edición española de SCIENTIFIC AMERICAN) Tema 23

¹⁰ Dependiendo de las estructuras que exijamos que se mantengan, podemos tener conceptos diferentes de la noción de conjunto hiperinfinito.