1. Resolución. Lista I OI. Cuestiones preliminares.

1. (Cabral, p.24) Demuestre que $H = \frac{1}{n} + nV(s_i)$, siendo H el índice de Herfindahl, n el número de empresas y $V(s_i)$ la varianza de las cuotas de mercado.

Resolución:

$$\begin{aligned} V(s_i) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(s_i - \bar{s})^2}{n} \\ \text{donde } \bar{s} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i}{n} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Entonces:

$$nV(s_i) = \sum_{i=1}^{n} (s_i^2 + (\frac{1}{n})^2 - \frac{2s_i}{n}) = H + \frac{1}{n} - \frac{2}{n}$$

Despejando H tenemos

$$H = nV(s_i) + \frac{1}{n}$$

2. (Cabral, p.23) Considere estos tres requisitos sobre índices de concentración.

a-*Transferencias*: Esa medida debe aumentar cuando crece la cuota de mercado de una empresa grande a costa de una pequeña.

b-*Monótona en el número de empresas.* Si las n empresas de la industria tuviesen cuotas de mercado iguales, entonces la medida debe decrecer al aumentar n.

c-*Cardinalidad*: Si se dividiese cada empresa en k empresas iguales, esa medida debería decrecer en la misma proporción.

Compruebe si los índices C_k, H y el índice de desviación típica de las cuotas de mercado (σ_x) cumplen estas condiciones.

Resolución:

a) C_k no lo cumple. Supogamos un mercado con cuotas $s_1 = 0.5$, $s_2 = 0.3$ y $s_3 = 0.2$. El $C_2 = 0.8$. Pasemos cuota de la segunda empresa a la primera y nos queda $s_1' = 0.55$, $s_2' = 0.25$ y $s_3' = 0.2$. No obstante el C_2 no ha variado.

Fijado n, σ_x y H se mueven en la misma dirección por el problema anterior. Por lo tanto, si lo probamos para H, lo habremos demostrado también para σ_x.

Supogamos que dos mercados son iguales excepto que en el primero las empresas i y j tienen cuotas s_i y s_j respectivamente, mientras que en el segundo tienen cuotas $s_i + \varepsilon$ y $s_j - \varepsilon$. Tenemos que $s_i > s_j$ y $\varepsilon > 0$. Si se cumple el principio de transferencia, el índice de Herfindahl tiene que ser mayor en el segundo mercado. La diferencia entre los índices del segundo y primer mercado es:

$$\Delta H = (s_i + \varepsilon)^2 + (s_j - \varepsilon)^2 - s_i^2 - s_j^2 = 2\varepsilon(\varepsilon + (s_i - s_j)) > 0$$

b) Para responder a esa pregunta, vamos a calcular los índices para el caso de empresas iguales:

$C_k = \dfrac{k}{n}$ (decreciente)

$H = \dfrac{1}{n}$ (decreciente)

$\sigma_x = 0$, ya que $s_i = \bar{s} = \dfrac{1}{n}$. No lo cumple.

c) En un mercado el índice de Herfindahl es H. Si dividimos cada empresa en k empresas iguales el índice de Herfindahl vale:

$$H^k = \sum_{i=1}^{n} k(\frac{s_i}{k})^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}(s_i)^2 = \frac{1}{k}H.$$

En el mercado con índice de Herfindahl H, la desviación típica vale $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{H - \frac{1}{n}}{n}}$. Si dividimos cada empresa en k empresas iguales, la desviación típica vale:

$$\sigma_x^k = \sqrt{\frac{\frac{1}{k}H - \frac{1}{nk}}{nk}} = \frac{1}{k}\sigma_x$$

C_k no lo cumple. Supogamos un mercado con cuotas $s_1 = 0.6$, $s_2 = 0.4$. El $C_2 = 1$. Dividamos cada empresa en dos empresas iguales. En este caso tendremos las cuotas: $s_1' = 0.3$, $s_2' = 0.3$, $s_3' = 0.2$ y $s_4' = 0.2$. El $C_2 = 0.6$. No cumple el principio porque el índice no se ha reducido a la mitad.

3. Suponga que la demanda de mercado viene dada por:

$$\begin{aligned} P(X) &= X^{(-\frac{1}{\varepsilon})} \\ \varepsilon &> 1 \end{aligned}$$

y el coste unitario de producción por c. Halle el bienestar social dado un nivel de producción X_o. ¿Cuál es el nivel de producción que maximiza el bienestar social ?

Resolución:

$$
\begin{aligned}
W(X_o) &= \int_0^{X_o} X^{(-\frac{1}{\varepsilon})} dX - cX_0 = (-\frac{1}{\varepsilon}+1)X^{1-1/\varepsilon}\rceil_0^{X_0} - cX_o = \\
&\frac{X_o^{1-1/\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon}+1} - cX_o
\end{aligned}
$$

Para maximizar el bienestar tenemos:

$$W'(X_o) = X^{(-\frac{1}{\varepsilon})} - c = 0$$

En la producción que maximiza el bienestar, el precio se iguala al coste marginal.

2. Resolución. Lista II OI. Monopolio.

1. Suponga que un monopolio opera en un mercado con demanda $P = a - bX$ y su coste marginal de producción es c ($a > c$). El Estado pone un impuesto por unidad vendida de t.

a. Calcule la cantidad vendida por el monopolio.

b. Calcule el valor del impuesto que maximiza el bienestar social.

Resolución :

a. Por lo cálculos realizados en clase tenemos que la producción del monopolio con impuesto es:

$$X = \frac{a-c-t}{2b}$$

b. El bienestar social en función de t es:

$$W(t) = (a-c)\left(\frac{a-c-t}{2b}\right) - \left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{a-c-t}{2b}\right)^2$$

$$W'(t) = -\frac{a-c}{2b} + \frac{a-c-t}{4b} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2b}\right)\frac{-2(a-c)+a-c-t}{2} = 0$$

$$t = -a + c$$

El impuesto es negativo, es decir, se trata de una subvención. El precio del monopolio se iguala a:

$$P = \frac{a+c+t}{2} = c$$

El precio se iguala al coste marginal. El monopolio produce la cantidad competitiva. Comprobamos en clase que era la que maximizaba el bienestar social.

c. El ingreso presupuestario del gobierno viene dado por:

$$I = \left(\frac{a-c-t}{2b}\right)t$$

Esta función es cónacava en t (curba de Laffer).

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial t} &= \left(\frac{1}{2b}\right)(a-c-t-t) = 0\\ t &= \frac{a-c}{2}\end{aligned}$$

2. En un país pequeño, suponga que un monopolio sirve un mercado con demanda $P = 100 - X$. La función de costes del monopolio viene dada por $C(X) = X^2$.

a. Encuentre el equilibrio de mercado.

b. Suponga que los consumidores consiguen abrir el mercado al comercio internacional. Encuentre el nuevo equilibrio si el precio internacional se iguala a 25.

c. Aduciendo que la industria nacional se encuentra en peligro, el monopolista convence al gobierno para que establezca un arancel por unidad de 25. Encuentre el nuevo equilibrio.

d. Encuentre el equilibrio si el arancel del apartado anterior es sustituído por una cuota que permite importar la misma cantidad que en el apartado anterior. ¿ Cómo evolucionan los beneficios del monopolio con el cambio ?

Resolución:

a.

$$\Pi(X) = (100 - X)X - X^2$$

$$\Pi'(X) = 100 - 2X - 2X$$

$$X^* = 25 \; P^* = 75$$

b. Como el precio del apartado anterior es superior a 25, el precio interior se igualará al internacional. En este caso, el beneficio del monopolio se iguala a:

$$\Pi(X) = 25X - X^2$$

$$\Pi'(X) = 25 - 2X = 0$$

$$X^* = \frac{25}{2}$$

Las importaciones (M) se igualan a:

$$100 - \frac{25}{2} - M = 25$$

$$M = \frac{125}{2}$$

c. Es como antes pero susituyendo 25 por 50.

$$X^* = 25 \; \Pi^* = 625$$

$$M = 25$$

d. Se importarán 25 unidades. Por lo tanto la demanda de la empresa nacional vendrá dada por:

$$X = 100 - P - 25 = 75 - P$$

En este caso los beneficios serán:

$$\Pi(X) = (75 - X)X - X^2$$

$$\Pi'(X) = 75 - 2X - 2X$$

$$X^* = \frac{75}{4} \; P^* = \frac{225}{4} \; \Pi^* = \frac{5625}{8}$$

Obtiene más beneficios que en el apartado anterior. El monopolista prefiere la cuota a un arancel aunque los dos supongan el mismo nivel de importaciones.

3. En el modelo de monopolio analizado en clase, halle el tipo impositvo (λ) sobre los beneficios que proporciona los mismos ingresos tributarios que un impuesto unitario t.

¿Cuál de los dos impuestos proporciona un bienestar social superior?

Nota: Con gobierno, el bienestar social es la suma del excedente de los consumidores, los beneficios y los ingresos tributarios del gobierno.

Resolución

Un impuesto sobre los beneficios no cambia la decisión óptima del monopolio. Por lo tanto ingresará lo mismo que un impuesto unitario sobre la producción cuando:

$$t\left(\frac{a-c-t}{2b}\right) = \lambda\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 (\frac{1}{b})$$

$$\lambda = \frac{2t(a-c-t)}{(a-c)^2} \leq \frac{2\left(\frac{a-c}{2}\right)^2}{(a-c)^2} = \frac{1}{2}$$

El bienestar es menor con el impuesto sobre la producción, porque las ventas son menores y el poder de mercado mayor.

4. Suponga que un productor vende su producción a través de un único distribuidor. El coste de producción viene dado por $C(X) = cX$, la distribución no supone ningún coste y la demanda de mercado viene dada por: $P(X) = a - bX$. En contraste con lo que hicimos en clase, supongamos que el contrato de suministro puede constar de un precio por unidad (p_y) y una suma constante F.

¿Qué contrato ofrece el productor al distribuidor para maximizar sus beneficios?

Resolución

Para poder calcular cuál es el contrato óptimo, hay que saber cuál será el comportamiento del distribuidor ante un contrato. Con un contrato $p_y x + F$, el distribuidor si participa en la distribución venderá $\dfrac{a-p_y}{2b}$ y obtendrá los beneficios de $\left(\dfrac{a-p_y}{2}\right)^2(\dfrac{1}{b}) - F$. Le interesará distribuir el bien si la anterior expresión es positiva.

El productor al escoger el contrato maximizará la expresión siguiente:

$$\begin{aligned} & \underset{p_y,F}{Max}(p_y - c)\left(\frac{a-p_y}{2b}\right) + F \\ s.a.0 \quad & \leq \quad \left(\frac{a-p_y}{2}\right)^2(\frac{1}{b}) - F \end{aligned}$$

Como escogerá la parte fija más alta compatible con que el distribuidor decida comprarle, la restricción siempre se da en igualdad y se puede sustituir en el objetivo:

$$\underset{p_y}{Max}(p_y - c)\left(\frac{a-p_y}{2b}\right) + \left(\frac{a-p_y}{2}\right)^2(\frac{1}{b})$$

La condición de primer orden del programa de maximización se iguala a:

$$\begin{aligned} a - p_y - p_y + c - a + p_y &= 0 \\ p_y &= c \end{aligned}$$

El productor obtiene unos beneficios de $\left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2(\dfrac{1}{b})$. Los mismos que se obtenían con integración vertical.

3. Resolución Lista III. Oligopolio (estático)

1. En un mercado cuya demanda viene dada por $P = 90 - X$, operan una empresa dominante y 100 empresas competitivas simétricas. La función de costes de las empresas competitivas es $c(x) = 50x^2$ y la función de costes de la empresa dominante es $C(X) = 2X$. Halle el equilibrio de mercado.

Solución

Para derivar la oferta individual de cada empresa igualamos el precio al coste marginal.

$$\begin{aligned} P &= 100x \\ x^s &= \frac{P}{100} \end{aligned}$$

La oferta agregada se iguala a:

$$X^s = P$$

La función de demanda efectiva para la empresa dominante se iguala a:

$$\begin{aligned} X &= 90 - P - P = 90 - 2P \\ P &= 45 - \frac{X}{2} \end{aligned}$$

Con lo aprendido en clase sobre el monopolio sabemos que la cantidad vendida y el precio se igualarán respectivamente a 43 y $\frac{47}{2}$. En consecuencia, las empresas competitivas venderán $\frac{47}{2}$.

2. Suponga que en un mercado con demanda $P = 90 - X$ hay 100 productores competitivos simétricos cuya función de costes viene dada por $C(x) = 50x^2$.

a) Halle el equilibrio de mercado.

b) ¿ Cómo cambia la situación si la distribución del producto a los consumidores la hace un monopolio ? Suponga para simplicar que la distribución no supone un coste adicional.

Solución

a) La oferta agregada es como en el ejercicio anterior y, por lo tanto, la demanda se iguala a la oferta si:

$$\begin{aligned} P &= 90 - P \\ P &= 45 \end{aligned}$$

La cantidad intercambiada también se iguala a 45.

b) Lo importante es calcular la función de costes del monopolio distribuidor. Si se compromete a comprar a un precio p_y, las empresas competitivas le venderán:

$$X = p_y$$

Es decir, para comprar X unidades tiene que poner un precio de X. Por lo tanto, su función de costes se iguala a $C(X) = X^2$. La función de beneficios del monopolio distribuidor se iguala a:

$$\begin{aligned} \pi &= (90 - X)X - X^2 \\ \frac{\partial \pi}{\partial X} &= 90 - 2X - 2X = 0 \\ X &= 22.5 \end{aligned}$$

El precio que pagan los consumidores se iguala a $P = 90 - 22.5 = 67.5$ y el que reciben los productores se iguala a 22.5.

3. Suponga que en un mercado con demanda $P = a - bX$, la producción está monopolizada, mientras que la distribución la realizan n empresas competitivas. La función de costes del monopolio productor viene dada por $C(X) = cX$ y la de cada empresa competitiva distribuidora por $c(x) = dx^2$.

¿ Halle el precio p_y al que el productor venderá el producto a las empresas distribuidoras ?

Solución

Si el productor vende a los distribuidores a un precio p_y, la función de oferta de cada empresa competitiva se iguala a:

$$\begin{aligned} p_y + 2dx &= P \\ x^s &= \frac{P - p_y}{2d} \end{aligned}$$

La oferta agregada se iguala a:

$$X^S = n\left(\frac{P - p_y}{2d}\right)$$

El precio de mercado será el que iguale demanda a oferta agregadas:

$$n\left(\frac{P - p_y}{2d}\right) = \frac{a - P}{b}$$

$$P = \frac{2ad + bnp_y}{bn + 2d}$$

La cantidad intercambiada se iguala a:

$$X = \frac{n(a - p_y)}{bn + 2d}$$

Esto nos define la demanda que sirve el productor. Despejando p_y tenemos

$$p_y = a - \frac{bn + 2d}{n} X$$

Aplicando lo visto en clase para demandas y costes lineales tenemos que la elección óptima del monopolio será vender una cantidad y un precio iguales respectivamente a:

$$X = \frac{(a-c)n}{2(bn + 2d)}, \ p_y = \frac{a+c}{2}$$

Sería interesante comparar esta situación con la que se obtendría si el monopolio productor se integrara verticalmente comprando las empresas competitivas. En este caso tiene que decidir, si quiere vender X, qué cantidad distribuye a través de cada uno de los n puntos de venta de que dispone. Como los costes marginales de distribución son crecientes es fácil ver que le conviene que cada punto de venta distribuya la misma cantidad $\frac{X}{n}$ (ver nota al final). En este caso, la función de costes del monopolio es:

$$C(X) = cX + n\left(\frac{X}{n}\right)^2 = cX + \frac{dX^2}{n}$$

Su función de beneficios se iguala a:

$$\begin{aligned}
\pi &= (a - c - bX)X - \frac{dX^2}{n} \\
\frac{\partial \pi}{\partial X} &= a - c - 2bX - \frac{2dX}{n} = 0 \\
X^I &= \frac{(a-c)n}{2bn + 2d}
\end{aligned}$$

Excepto si tenemos que $d = 0$, la producción es mayor con integración $X^I > X$. Sin integración parte de los beneficios de las ventas va a parar a las empresas distribuidoras. El monopolio al decidir la producción no tiene en cuenta esta externalidad positiva que genera y acaba produciendo una cantidad menor que con integración. Cuando $d = 0$, las empresas competitivas no obtienen beneficios independientemente del nivel de producción. El monopolio productor se apropia de todos los beneficios de la industria. En este caso, la externalidad mencionada no existe y, en consecuencia, las dos decisiones de producción coinciden. Esta diferencia entre las cantidades elegidas supone también que los beneficios de la industria son mayores con integración (excepto si $d = 0$).

Nota: Si llamamos a cada uno de los puntos de venta que posee el monopolio con un número natural de 1 hasta n, podemos escribir el problema como la asignación de una cantidad x_i que tienen que vender el puesto de venta i, teniendo que $X = \sum_{i=1}^{n} x_i$. La asignación pretenderá minimizar costes, es decir,

$$\begin{aligned} & \underset{x_1 \ldots x_v}{Min} \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 \\ s.a.X &= \sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

Construyendo el Lagrangiano tenemos:

$$\begin{aligned} L(x_1 \ldots . x_{n,} \lambda) &= \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 + \lambda(X - \sum_{i=1}^{n} x_i) \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} &= 2dx_i - \lambda = 0 \\ x_i &= \frac{\lambda}{2d} \end{aligned}$$

Esto implica que se asigna a cada punto de venta la misma cantidad. En consecuencia $x_i = \dfrac{X}{n}$ como habíamos deducido intuitivamente.

4. Suponga un mercado con demanda $P = a - bX$. Dos empresas operan en ese mercado. Su coste marginal de producción se iguala a c. La empresa 1 es privada y maximiza beneficios y la empresa 2 es pública y maximiza el bienestar social.

Calcule el equilibrio de Cournot en este mercado.

Resolución:

En equilibrio cada empresa, tanto la pública como la privada tienen que estar maximizando su objetivo. La empresa privada maximiza el beneficio:

$$\pi_1 = (a - c - bx_1 - bx_2)x_1$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} = a - c - 2bx_1 - bx_2 = 0 \tag{3.1}$$

La empresa 2 maximiza el bienestar social:

$$W_2 = (a-c)(x_1+x_2) - \left(\frac{b}{2}\right)(x_1+x_2)^2$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial x_2} = a - c - bx_1 - bx_2 = 0 \tag{3.2}$$

Solucionando las ecuaciones (3.1) y (3.2) obtenemos el equilibrio:

$$x_1 = 0 \; x_2 = \frac{a-c}{b}$$

El precio se iguala al coste marginal.

5. (Cabral 6.4. p.118) Suponga un triopolio de Cournot con demanda $P = 500 - X$ y costes marginales constantes $c_1 = 100$ y $c_2 = c_3 = 200$.

a. Calcule el equilibrio de Cournot. Compruebe que sus beneficios son crecientes con la cuota de mercado de las empresas.

b. Suponga que se produce una fusión entre (i) la empresa 1 y la empresa 3 o (ii) la empresa 2 y la empresa 3. Compruebe que la primera fusión es rentable mientras que la segunda no lo es. Concluya que una fusión sólo será rentable si el aumento en eficiencia es suficientemente grande.

Resolución:

a. Econtramos, en primer lugar, el equilibrio de mercado con tres empresas. Los beneficios de las empresas son:

$$\Pi_1 = (400 - x_1 - x_2 - x_3)x_1$$

$$\Pi_i = (300 - x_1 - x_2 - x_3)x_i \quad i = 2, 3$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial \Pi_1}{x_1} = 400 - 2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} = 300 - x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_3}{\partial x_3} = 300 - x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

En equilibrio las dos empresas ineficientes producirán la misma cantidad $x_2 = x_3 = x$. El sistema anterior nos queda reducido a:

$$400 - 2x_1 - 2x = 0$$

$$300 - 3x - x_1 = 0$$

Su solución es

$$x_2 = x_3 = 50 \ , x_1 = 150; \ s_1 = \frac{3}{5} \ , s_3 = s_2 = \frac{1}{5}$$

$$\Pi_1 = 22.500, \ \Pi_2 = \Pi_3 = 2500$$

La empresa con una cuota superior obtiene también beneficios superiores.

b. Observemos que en los dos casos después de la fusión tendremos una empresa con coste unitario de 100 compitiendo con una con coste unitario de 200. La empresa de coste bajo la denotamos con un subíndice de 1 y la de coste alto con un subíndice de 2. Sus beneficios respectivos son:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (400 - x_1 - x_2)x_1 \\ \pi_2 &= (300 - x_1 - x_2)x_2 \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden respectivas son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} &= 400 - 2x_1 - x_2 = 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial x_2} &= 300 - 2x_2 - x_1 = 0 \end{aligned}$$

Solucionando el sistema de ecuaciones obtenemos el equilibrio de Cournot.

$$x_1 = \frac{500}{3} \text{ y } x_2 = \frac{200}{3}$$

$$\Pi_1 = \left(\frac{500}{3}\right)^2 = 27.777 \text{ y } \Pi_2 = \left(\frac{200}{3}\right)^2 = 4444$$

Lo que es importante es darse cuenta que la fusión entre 1 y 2 es rentable mientras que la de 2 y 3 no lo es. 1 y 3 obtienen antes de la fusión conjuntamente

25000, mientras que después obtienen 27777. 2 y 3 obtienen antes de la fusión conjuntamente 5000, mientras que después obtienen 4444.

6. Tenemos dos empresas de países distintos que compiten en el mercado internacional de un producto cuya demanda viene dada por: $P = A - bX$. Las dos tienen el mismo coste unitario c, pero una se beneficia de un subsidio unitario a la producción s de su gobierno.

a) Halle las cantidades producidas por las empresas si compiten a la Cournot.

b) Halle el subsidio que maximiza los beneficios (netos del subsidio) de la empresa que lo recibe.

Resolución:

La empresa con subsidio la llamamos empresa 1 y la otra la llamamos empresa 2. Sus beneficios respectivos vienen dados por:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= (A - b(x_1 + x_2) - (c - s))x_1 \\ \pi_2 &= (A - b(x_1 + x_2) - c)x_2\end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden respectivas son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} &= A - c + s - 2bx_1 - bx_2 = 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial x_2} &= A - c + s - 2bx_2 - bx_1 = 0\end{aligned}$$

Solucionando el sistema de ecuaciones obtenemos el equilibrio de Cournot:

$$x_1 = \frac{A - c + 2s}{3b}$$
$$x_2 = \frac{A - c - s}{3b}$$

El precio de mercado se iguala a

$$P = A - b(x_1 + x_2) = \frac{A + 2c - s}{3}$$

El beneficio de la empresa 1, neto del subsidio, se iguala a:

$$\Pi_1 = (p - c)x_1 = \left(\frac{A - c - s}{3}\right)\left(\frac{A - c + 2s}{3b}\right)$$

El subsidio que maximiza el beneficio de la empresa 1, neto del subsidio, cumple:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi_1}{\partial s} &= -A + c - 2s + 2A - 2c - 2s = 0 \\
s^* &= \frac{A-c}{4} > 0.
\end{aligned}
$$

7. Comprobar que en el caso de Cournot simétrico con demanda lineal analizado en clase las fusiones de dos empresas sólo son rentables en duopolio.

Resolución

Cada empresa antes de la fusión obtenía $(\frac{1}{b})\left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2$. Después de la fusión obtienen entre las dos $(\frac{1}{b})\left(\frac{a-c}{n}\right)^2$. La fusión será rentable si la siguiente expresión tiene signo positivo:

$$
(\frac{1}{b})\left(\frac{a-c}{n}\right)^2 - (\frac{2}{b})\left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2 = \frac{(a-c)^2}{b}\left(\frac{1+2n-n^2}{n^2(n+1)^2}\right)
$$

Es postiva sólo si $n \leq 2$.

8. Suponga que en un mercado operan n empresas simétricas con función de costes $C(x) = cx$. La demanda de mercado viene dada por:

$$
\begin{aligned}
P(X) &= X^{(-\frac{1}{\varepsilon})} \\
\varepsilon &> 1
\end{aligned}
$$

a) Compruebe que ε representa la elasticidad precio de la demanda.

b) Halle el equilibrio de Cournot.

c) ¿Cuál es el efecto de la elasticidad precio de la demanda sobre el precio de mercado?

Resolución

a) La elasticidad se iguala a -$\frac{P}{P'(X)X}$. En este caso tenemos

$$
-\frac{X^{\frac{-1}{\varepsilon}}}{-\frac{1}{\varepsilon}X^{(-\frac{1}{\varepsilon}-1)}X} = \varepsilon
$$

b) El beneficio de cada empresa se iguala a:

$$
\pi_i = (X^{-\frac{1}{\varepsilon}} - c)x_i
$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\varepsilon} X^{(-\frac{1}{\varepsilon}-1)} x_i + X^{-\frac{1}{\varepsilon}} - c = 0$$

Imponiendo simetría, dado que el equilibrio será simétrico tenemos que

$$-\frac{1}{\varepsilon}(nx)^{(-\frac{1}{\varepsilon}-1)} x + (nx)^{-\frac{1}{\varepsilon}} - c = 0$$

$$(nx)^{-\frac{1}{\varepsilon}} \left(-\frac{1}{n\varepsilon} + 1 \right) = c$$

$$x = \left(\frac{n\varepsilon c}{\varepsilon n - 1} \right)^{-\varepsilon} \left(\frac{1}{n}\right)$$

$$P = \frac{n\varepsilon c}{\varepsilon n - 1}$$

c)

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = -\frac{nc}{(n\varepsilon - 1)^2} < 0$$

9. (Cabral p. 119) Un mercado está abastecido por un oligopolio con n empresas de costes marginales iguales y constantes. El producto es homogéneo y la elasticidad precio de la demanda es constante e igual a uno. Suponiendo que hay competencia (i) en precios o (ii) en cantidades, determine el incremento percentual del precio de equilibrio si se fusionan k empresas.

Resolución.

(i) en competencia en precios, el precio no varía excepto si $n = k$.

(ii) La condición de primer orden de una empresa con coste c_i se escribe como:

$$P(X) - c_i = -P'(X) x_i$$

Siendo ε, la elasticidad de demanda ($\varepsilon = \frac{-P(X)}{P'(X)X}$), y s_i la cuota de mercado de la empresa, la expresión anterior se puede escribir como:

$$\frac{P(X) - c_i}{P(X)} = \frac{s_i}{\varepsilon}$$

Como el equilibrio será simétrico antes y después de la fusión, la elasticidad es unitaria y el coste unitario es c para todas las empresas, el precio antes (P^a) y después de la fusión (P^d) cumplirán respectivamente:

$$\frac{P^a - c}{P^a} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{P^d - c}{P^d} = \frac{1}{n-k+1}$$

(Recuerde que después de la fusión de k empresas quedan $n-k+1$ independientes en el mercado).

Despejando tenemos:

$$P^a = \frac{nc}{n-1}$$

$$P^d = \frac{(n-k+1)c}{n-k}$$

El incremento proporcional de precios (ρ) se iguala a:

$$\rho = \frac{P^d - P^a}{P^a} = \frac{k-1}{n(n-k)} > 0$$

También se puede verificar que el incremento proporcional aumentaría con el número de empresas que se fusionan ya que $\dfrac{\partial \rho}{\partial k} > 0$.

10. (Cabral p. 119) Un duopolio tienen demanda dada por: $P = a - X$. El coste marginal de cada empresa es constante e igual a c. Suponga que las empresas proceden a un intercambio de participaciones en capital de γ. Determine la nueva situación de equilibrio en función de γ.

Resolución.

Llamemos una empresa, empresa 1 y la otra empresa 2. El beneficio de la empresa 1 con un swap de γ es:

$$\pi_1 = (a - c - x_1 - x_2)(1-\gamma)x_1 + (a - c - x_1 - x_2)\gamma x_2$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} = (a - c - x_1 - x_2)(1-\gamma) - (1-\gamma)x_1 - \gamma x_2 = 0$$

Como el equilibrio es simétrico podemos imponerla ($x_1 = x_2 = x$) en la condición de primer orden para obtenerlo. Nos da:

$$x = \frac{(1-\gamma)(a-c)}{3-2\gamma}$$

Si $\gamma = 0$, tenemos el equilibrio de Cournot normal. Tenemos la producción de monopolio cuando $\gamma = \frac{1}{2}$. También se puede ver que $\dfrac{\partial x}{\partial \gamma} < 0$.

11. Suponga que tenemos un duopolio de empresas que compiten en cantidades, pero una empresa (líder) escoge la producción antes que la otra empresa (seguidora). Suponga para simplificar que no hay costes de producción. La demanda de mercado viene dada por: $P = 1-Q$. Halle las producciones que realizan las empresas.

Resolución:

La empresa seguidora escoge su producción (q_s) cuando la líder ya la ha escogido (q_l). En este caso su función de beneficios es:

$$\pi_s = (1 - q_s - q_l)q_s$$

Se maximiza en:

$$q_s = \frac{1 - q_l}{2} \tag{3.3}$$

La empresa líder tiene que tenerlo en cuenta cuando elija su producción. Su función de beneficios teniendo en cuenta lo que va a producir la seguidora (5.5) es:

$$(1 - q_l - \frac{1 - q_l}{2})q_l$$

Se maximiza en $q_l = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, la seguidora producirá $q_s = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$. Y obtienen beneficios respectivamente de $\pi_l = \frac{1}{8}$ y $\pi_s = \frac{1}{16}$.

12. Suponga las mismas hipótesis que en el problema 11 excepto que la empresa seguidora tiene que pagar un coste fijo F si quiere producir. Halle las producciones de las dos empresas. La interpretación habitual es que la empresa líder es una empresa instalada en el mercado mientras que la empresa seguidora es un entrante potencial.

Resolución

La existencia del coste fijo nos obliga a comprobar si la empresa seguidora obtiene beneficios positivos produciendo. Si produce sabemos por el problema 11 que le convendrá producir $q_s = \dfrac{1 - q_l}{2}$ obteniendo unos beneficios de $\left(\dfrac{1 - q_l}{2}\right)^2$. En consecuencia, le conviene producir si:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 - q_l}{2}\right)^2 - F &\geq 0 \\ q_l &< 1 - 2\sqrt{F} \end{aligned}$$

Si con la producción de monopolio ($q_l = \frac{1}{2}$), la empresa seguidora no quiere producir ya que $\frac{1}{2} \geq 1 - 2\sqrt{F}(F \geq \frac{1}{16})$, la empresa líder produce la produccíion de monopolio y la empresa seguidora no produce (no entra). En este caso se dice la entrada está bloqueada.

En los otros casos tiene comparar los beneficios permitiendo que la seguidora produzca (estaremos como en el problema 11: $q_l = \frac{1}{2}$ y $\pi_l = \frac{1}{8}$) o produciendo la mínima cantidad que hace que la seguidora no produzca ($q_l = 1 - 2\sqrt{F}$ y $\pi_l = 2\sqrt{F}(1 - 2\sqrt{F})$). Para decidirse a producir tiene que pasar que:

$$\frac{1}{8} - 2\sqrt{F}(1 - 2\sqrt{F}) \geq 0 \tag{3.4}$$

$$F \leq \frac{2 - 2\sqrt{2}}{32} \tag{3.5}$$

Para $F \leq \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{32}$ las produciones son como en el problema 11. Para $\dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{32} < F < \frac{1}{16}$, la empresa líder produce $q_l = 1 - 2\sqrt{F}$ y la seguidora no produce. En estos casos, se dice que la entrada ha sido evitada.

Nota: para obtener la solución de (3.4) definir $x = \sqrt{F}$ y $f(x) = \frac{1}{8} - 2x + 4x^2$. (3.4) se puede escribir como $f(x) \geq 0$. Dado que $f(x)$ es convexa lo último se cumple si $x \leq \dfrac{2 - \sqrt{2}}{8}$ y $x \geq \dfrac{2 + \sqrt{2}}{8}$. Por lo tanto (3.4) se cunple si $F \leq \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{32}$ y $F \geq \dfrac{3 + 2\sqrt{2}}{32}$. La segunda desigualdad no nos interesa porque estamos tratando el caso $F < \frac{1}{16}$ y $\dfrac{3 + 2\sqrt{2}}{32} > \frac{1}{16}$.

4. Resolución Lista IV. Oligopolio (dinámico).

1. Suponga que n empresas idénticas compiten en un mercado infinitos períodos de tiempo. La demanda de mercado viene dada por $X = S(a - P)$ y el coste marginal es constante e igual a c. Determine los valores del tipo de interés para los cuales se puede mantener el acuerdo colusivo. Suponga que las empresas compiten a la Cournot.

Solución

El acuerdo colusivo significa que cada empresa produzca la enésima parte de la producción de monopolio

$$q^M = \frac{S}{n}\left(\frac{a-c}{2}\right)$$

obteniendo en cada período la enésima parte del beneficio de monopolio.

$$\pi^M = \frac{S}{n}\left(\frac{a-c}{2}\right)^2$$

Los beneficios descontados de cumplir el acuerdo son:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\pi^M}{(1+r)^i} = \pi^M\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^i} = \frac{\pi^M}{1-\dfrac{1}{1+r}} = \pi^M\left(\frac{1+r}{r}\right)$$

Los beneficios de no cumplir el acuerdo son hoy escojo la cantidad que maximiza mis beneficios dado que los otros cumplen el acuerdo. Pero a partir de mañana tengo beneficios iguales a los de la competencia a la Cournot $\pi^c = S\left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2$, ya que todas las empresas pasan a competir libremente.

Vamos a calcular el beneficio que obtengo hoy si decido desviarme de las cantidades acordadas. El beneficio como función de la cantidad q_i se escribe como:

$$\pi_i = (a-(n-1)\frac{q^M}{S} - \frac{q_i}{S} - c)q_i$$

$$q_i^* = S\frac{(a-c)(n+1)}{4n} \quad \pi^d = S\left(\frac{(a-c)(n+1)}{4n}\right)^2$$

El beneficio que obtengo a partir de mañana si he incumplido el acuerdo es:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\pi^c}{(1+r)^i} = \pi^c\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^i} = \frac{\pi^c(\frac{1}{1+r})}{1-\dfrac{1}{1+r}} = \frac{\pi^c}{r}$$

Interesa cumplir el acuerdo si:

$$\pi^M\left(\frac{1+r}{r}\right) \geq \pi^d + \frac{\pi^c}{r}$$

$$r^c = \frac{\pi^M - \pi^c}{\pi^d - \pi^M} \geq r$$

Cuanto menor sea el tipo de interés menos descontamos el futuro y más nos interesará cumplir el acuerdo colusivo.

$$r^c = \frac{\frac{1}{4n} - \frac{1}{(n+1)^2}}{\left(\frac{n+1}{4n}\right)^2 - \frac{1}{4n}}$$

$$r^c = \frac{\frac{(n+1)^2 - 4n}{4n(n+1)^2}}{(\frac{1}{4})(\frac{(n+1)^2-4n}{4n})}$$

$$r^c = \frac{4n}{(n+1)^2}$$

Se mantiene el acuerdo si $r \leq r^c$. Tenemos que

$$\frac{\partial r^c}{\partial n} = \frac{1-n}{(n+1)^4} < 0$$

Cuanto mayor sea el número de empresas, más difícil que se cumpla la condición anterior. Por lo tanto, un aumento del número de empresas dificulta el mantenimiento de los acuerdos colusivos. En consecuencia, podemos esperar una correlación positiva entre concentración y beneficios.

También es interesante comparar el resultado con el que habíamos visto en clase cuando las empresas competían à la Bertrand. En ese caso, el resultado era que se mantenía el acuerdo cuando

$$\begin{aligned} r &\leq r^b \\ \text{donde } r^b &= \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

No está claro cuándo será más fácil cooperar si en el caso de Bertrand o en el caso de Cournot, porque no está claro en que caso son mayores los beneficios de no cumplir el acuerdo. Por un lado, el beneficio en el primer período es mayor en Bertrand porque es más fácil conseguir clientes pero, por otro lado, el beneficio a partir del primer período es menor porque el beneficio de Cournot es mayor que el beneficio de Bertrand.

Efectivamente no nos sale un resultado claro, porque tenemos que

$$\begin{aligned} r^c &< r^b \text{ si } n = 2 \\ r^b &< r^c \text{ si } n > 2 \end{aligned}$$

5. Resolución Lista V. Barreras de entrada.

1. Supongamos que la demanda de un mercado viene dada por $P = \frac{1}{X}$. El coste de instalarse se iguala a $F = \frac{1}{100}$. La función de costes de las empresas una vez instaladas es $C(x) = cx$, donde x es la cantidad producida. Las empresas instaladas compiten a la Cournot. Se pregunta.

a) Halle el número de empresas activas en el equilibrio de libre entrada.

b) Calcule el número de empresas activas que maximizarían el bienestar social. Compare el resultado con el obtenido en el primer apartado.

Resolución.

a)El beneficio de una empresa cuando han entrado n viene dado por:

$$\pi_i = (\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j} - c)x_i$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j} - c - \frac{x_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2} = 0$$

Como el equilibrio será simétrico podemos obtenerlo imponiendo simetría en la condición de primer orden anterior:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} = \frac{1}{nx} - c - \frac{1}{n^2 x} = 0$$

$$1 - \frac{1}{n} = nxc$$

$$x = \frac{n-1}{cn^2}$$

$$\pi = \frac{x}{nx} - cx = \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n^2} = \frac{n-n+1}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

El número de empresas en el equilibrio con libre entrada viene dado por:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{100}$$

$$n = 10$$

b) El bienestar social en función del número de empresas se puede escribir de la siguiente forma:

$$W(n) = \int_0^{\frac{n-1}{nc}} \frac{dX}{X} - c(\frac{n-1}{nc}) - \frac{n}{100}$$

El número de empresas que maximizará el bienestar social será aquél que cumpla la Condición de Primer Orden con igualdad.

$$W'(n) = \frac{nc}{n^2c(n-1)} - \frac{c}{n^2c} - \frac{1}{100} = 0$$

$$\frac{n - n + 1 - \frac{n^2(n-1)}{100}}{n^2(n-1)} = 0$$

$$\frac{1 - \frac{n^2(n-1)}{100}}{n^2(n-1)} = 0$$

Se puede comprobar que $n = 5$ es el único número real que satisface la ecuación anterior. En consecuencia el número de empresas que maximizaría el bienestar social sería 5. Vemos que con libre entrada tenemos demasiada entrada.

2. Supongamos que la demanda de un mercado viene dada por $P = 10 - X$. El coste de instalarse (F) se iguala a 1. La función de costes de las empresas una vez instaladas viene dada por $C(x) = 2x$.

a) Halle el número de empresas activas en equilibrio de libre entrada.

b) Halle el número de empresas que maximizaría el bienestar social.

c) Obtenga el precio de la licencia que conseguiría que las empresas con libre entrada coincidiera con el que maximiza el bienestar social.

Resolución:

a) A partir de lo hecho en clase, sabemos que es $n = 7$.

b) La función de bienestar en función de n vale:

$$\begin{aligned} W(n) &= \frac{64n}{n+1} - \frac{64n^2}{2(n+1)^2} - n = \\ &= \frac{32n(n+2)}{(n+1)^2} - n \end{aligned}$$

$$W'(n) = \frac{64}{(n+1)^3} - 1 = 0$$

$$n = 3$$

Tenemos demasiada entrada con libre entrada.

c) Tiene que ocurrir que con $n = 3$, los beneficios se igualen al coste de instalación más el precio de la licencia (L).

$$\frac{64}{16} = 1 + L$$

$$L = 3$$

3. Hallar para qué valores de la producción x, la siguiente función de costes presenta economías de escala:

$C(x) = 2\sqrt{x} + x^2$

Resolución.

Tenemos economías de escala si el coste marginal es menor que el coste medio:

$$C'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2x < \frac{2}{\sqrt{x}} + x = CMe$$

$$x < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$x < 1$$

Tenemos economías de escala si el coste medio es decreciente:

$$CMe'(x) = -x^{-\frac{3}{2}} + 1 < 0$$

$$x < 1$$

4. Si en un mercado entran n empresas, la demanda de cada una de ellas vendrá dada por:

$$D_i(p) = \frac{Sp_i^{-\phi}}{\sum_{j=1}^{n} p_j^{-\phi}} \text{ con } \phi > 2. \tag{5.1}$$

El coste unitario de producción se iguala a $c > 0$.

Halle el número de empresas que entrarán en dicho mercado si el coste fijo de entrada es F. Las empresas una vez en el mercado compiten en precios.

Solución:

Una vez han entrado n empresas, el beneficio de una de ellas se iguala a:

$$\pi_i = (p_i - c)\frac{Sp_i^{-\phi}}{\sum_{j=1}^{n} p_j^{-\phi}}$$

La C.P.O. se iguala a:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} = \frac{S p_i^{-\phi}}{\sum_{j=1}^{n} p_j^{-\phi}} + S(p_i - c)\left(\frac{-\phi p_i^{-\phi-1}\sum_{j=1}^{n} p_j^{-\phi} + \phi p_i^{-2\phi-1}}{\left(\sum_{j=1}^{n} p_j^{-\phi}\right)^2}\right) = 0 \qquad (5.2)$$

Como las empresas son simétricas, el equilibrio será simétrico y podemos obtenerlo imponiendo simetría ($p_i = p_j = p$) en (5.2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} + (p - c)\left(\frac{\phi(-n+1)}{n^2 p}\right) &= 0 \\ np + \phi(-n+1)(p-c) &= 0 \\ p(n - \phi(n-1)) + c\phi(n-1) &= 0 \\ p &= \frac{c\phi(n-1)}{\phi(n-1) - n} \\ p - c &= \frac{cn}{\phi(n-1) - n} \end{aligned}$$

Observe que $\frac{\partial p}{\partial \phi} < 0$. Por lo tanto ϕ mide el grado de competencia en el mercado. Los beneficios de las empresas que han entrado se igualan a:

$$\pi = \frac{Sc}{\phi(n-1) - n}$$

El número de empresas que entran viene dado por la condición de beneficio cero:

$$\begin{aligned} \frac{Sc}{\phi(n-1) - n} &= F \qquad (5.3) \\ n &= \frac{\left(\frac{Sc}{F}\right) + \phi}{\phi - 1} \end{aligned}$$

Observe que $\frac{\partial n}{\partial \phi} < 0$. Cuanta mayor la competencia en el mercado, menores los beneficios y, por lo tanto, menor el número de empresas que entran.

Se puede comprobar que incrementos en el tamaño del mercado (de S_0 a S_1, por ejemplo) se traducen en un incremento proporcional menor del número de empresas:

$$\left(\frac{\left(\frac{S_1 c}{F}\right) + \phi}{\phi - 1} - \frac{\left(\frac{S_0 c}{F}\right) + \phi}{\phi - 1}\right) \Big/ \left(\frac{\left(\frac{S_0 c}{F}\right) + \phi}{\phi - 1}\right) \quad < \quad \frac{S_1 - S_0}{S_0}$$

$$\left(\frac{\left(\frac{c}{F}\right)(S_1 - S_0)}{\phi - 1}\right) / \left(\frac{\left(\frac{S_0 c}{F}\right) + \phi}{\phi - 1}\right) < \frac{S_1 - S_0}{S_0}$$

$$\frac{\frac{c}{F}}{\left(\frac{S_0 c}{F}\right) + \phi} < \frac{1}{S_0}$$

$$\frac{\frac{cS_o}{F}}{\left(\frac{S_0 c}{F}\right) + \phi} < 1$$

5. Encuentre los niveles de producción para los cuales la siguiente función de costes es subaditiva pero no presenta economías de escala:

$$C(q) = F + q^2$$

Solución:

Presentará economías de escala si el coste medio es mayor que el coste marginal:

$$\begin{aligned} 2x &< \frac{F}{x} + x \\ x &< \sqrt{F} \end{aligned}$$

Tendremos que los costes son subaditivos cuando

$$\begin{aligned} F + x^2 &< 2F + x_1^2 + x_2^2 \\ x &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

La parte derecha de la desigualdad se minimiza cuando $x_1 = x_2 = \dfrac{x}{2}$, ya que:

$$\underset{x_1}{Min}\, x_1^2 + (x - x_1)^2$$

La condición de primer orden del programa de minimización es:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2(x - x_1) &= 0 \\ x_1 &= \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Es decir, para que tengamos que los costes son subaditivos tiene que darse que:

$$\begin{aligned} F + x^2 &< 2F + 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ \frac{x^2}{2} &< F \\ x &< \sqrt{2F} \end{aligned}$$

Para $\sqrt{F} < x < \sqrt{2F}$ los costes son subaditivos pero no tenemos economías de escala.

6. La tecnología única de producción del bien A consta de un coste de instalación (F) igual a 1 y de un coste marginal constante de producción (c) igual a 2. Calcule el número de empresas con libre entrada en el mercado del bien A en el país 1 con demanda $X = 9(10 - P)$ y en el país 2 con demanda $X = 16(10 - P)$. Calcule el número de empresas en el equilibrio con libre entrada si los dos países deciden integrarse comercialmente. Comente el resultado. Suponga que las empresas compiten a la Cournot.

Solución:

Para poder solucionar el problema para los casos particulares que se señalan vamos a solucionar el equilibrio de libre entrada para demandas $X = S(a - P)$. Despejando el precio tenemos $P = a - \dfrac{X}{S}$. En la etapa de mercado, suponiendo que han entrado n empresas, calculamos el equilibrio.

El beneficio de una de las empresas que han entrado, llamémosla j, viene dado por:

$$\Pi_j = (a - 2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{S})x_j$$

La CPO de su programa de maximización viene dado por:

$$\frac{\partial \Pi_j}{\partial x_j} = a - 2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{S} - \frac{x_j}{S} = 0. \tag{5.4}$$

En las producciones de equilibrio tiene que cumplirse la condición de primer orden para cualquier empresa que haya entrado. Esto nos determina un sistema de n ecuaciones y n incógnitas. Dada la simetría de las hipótesis, cada empresa producirá los mismo en equilibrio. Podemos obtener ese nivel de producción imponiendo $x_1^* = ... = x_n^* = x^*$ en (6.1):

$$\begin{aligned} a - 2 - \frac{(n+1)x^*}{S} &= 0 \\ x^* &= \frac{S(a-2)}{(n+1)} \end{aligned}$$

A partir de aquí se puede calcular el beneficio de equilibrio:

$$\Pi^* = S\left(\frac{a-2}{(n+1)}\right)^2.$$

Para obtener el número de empresas que entran hay que utilizar la condición de beneficio cero:

$$S\left(\frac{a-2}{(n+1)}\right)^2 = 1$$

Despejando n tenemos:

$$n = (a-2)\sqrt{S} - 1$$

Eso implica que antes de la integración en el país 1 había $n_1 = 8 \cdot 3 - 1 = 23$ empresas y en el país 2 $n_2 = 8 \cdot 4 - 1 = 31$.

Para ver el número de empresas activas en el equilibrio de libre entrada cuando el mercado se integra tenemos que calcular la demanda del mercado integrado. Será el resultado de sumar a cada precio lo que se demandaba en 1 y en 2:

$$X = 9(10-P) + 16(10-P) = 25(10-P)$$

Así que en el mercado integrado operarán $n_I = (10-2) \cdot 5 - 1 = 39$ empresas.

Podemos ver que $n_1 + n_2 > n_I$. Es decir, la integración conlleva una reducción en el número de empresas activas. Eso supone un aumento de la concentración.

7. La tecnología única de producción de un bien consta de un coste de instalación (F) igual a 3 y de un coste marginal constante de producción (c) igual a 2. La demanda del bien viene dada por $X = 12(10-P)$. Calcule el número de empresas con libre entrada entrada si las empresas que entran en el mercado:

a) compiten a la Cournot.

b) compiten a la Bertrand

c) llegan a un acuerdo colusivo.

Solución:

a) Si entran n empresas, el beneficio de una de ellas, llamémosla j, viene dado por:

$$\Pi_j = (8 - (\frac{1}{12})\sum_{i=1}^{n} x_i)x_j$$

Cuando compiten a la Cournot, las empresas escogen cantidades y, en equilibrio, maximizan sus beneficios individuales. Para la empresa j esto significa:

$$\frac{\partial \Pi_j}{\partial x_j} = 8 - \frac{2x_j}{12} - (\frac{1}{12})\sum_{i \neq j} x_i = 0 \tag{5.5}$$

Como las empresas son iguales el equilibrio será simétrico $x_1^* = ... = x_n^* = x^*$. Imponiendo esta simetría en (5.5) obtenemos las cantidades de equilibrio:

$$\begin{aligned} 8 - \frac{(n+1)x^*}{12} &= 0 \\ x^* &= \frac{96}{(n+1)} \end{aligned}$$

A partir de aquí se puede calcular que el precio y el beneficio de equilibrio son respectivamente:

$$P = \frac{10+2n}{n+1} \text{ y } \Pi^* = 12\left(\frac{8}{(n+1)}\right)^2.$$

El número de empresas que entran se obtiene a partir de la condición de beneficio cero:

$$\begin{aligned} 12\left(\frac{8}{(n+1)}\right)^2 &= 3 \\ n &= 15 \end{aligned}$$

b) Si las empresas que entran compiten a la Bertrand, sabemos que sólo obtendrán beneficios positivos en monopolio. Siempre que entre más de una empresa, el beneficio será nulo. De esta manera tenemos que $n = 1$, ya que es la única manera de poder cubrir el coste fijo.

c) Si las n empresas que entran llegan a un acuerdo colusivo, cada una obtendrá la enésima parte del beneficio de monopolio (se corresponde al caso con una empresa en el apartado a). De esta manera la condición de beneficio cero equivale a:

$$\begin{aligned} (\frac{12}{n})16 &= 3 \\ n &= 64 \end{aligned}$$

Se puede comprobar que cuanto más competitiva sea la conducta en el mercado, menor será el número de empresas que entran en el mercado. Esto explica que el precio sea menor cuando las empresas compiten a la Cournot que cuando compiten a la Bertrand.

8. Supongamos que la demanda de un mercado viene dada por $P = a - X$. El coste de instalarse se iguala a F. La función de costes de las empresas una

vez instaladas viene dada por $C(x) = cx$, donde x es la cantidad producida. Las empresas instaladas compiten a la Cournot. Se pregunta.

a) Halle el número de empresas activas en equilibrio de libre entrada.

b) Calcule el número de empresas activas que maximizarían el bienestar social.

Resolución:

a) De los apuntes de clase sabemos que la producción de cada empresa en equilibrio se iguala a:

$$x = \frac{a-c}{n+1}$$

En este caso, el beneficio en equilibrio se iguala a:

$$\pi = (a - nx - c)x = (a - n\left(\frac{a-c}{n+1}\right) - c)\left(\frac{a-c}{n+1}\right) = \left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2$$

El número de empresas en libre entrada viene determinado por la condición de beneficio cero:

$$\begin{aligned} \pi &= F \\ \left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2 &= F \\ n_c &= \frac{a-c}{\sqrt{F}} - 1 \geq 1 \end{aligned}$$

b) El bienestar en la etapa de mercado dado un nivel de producción X viene dado por:

$$w(X) = \int_0^X (a-x)dx - cX = (a-c)X - \frac{X^2}{2}$$

El bienestar como función del número de empresas viene dado por:

$$W(n) = w(X) - nF$$

donde $X = n\left(\frac{a-c}{n+1}\right)$ se iguala al nivel de ventas con n empresas.

El número de empresas que maximiza el bienestar satisface:

$$W'(n) = (a-c)\frac{\partial X}{\partial n} - X\frac{\partial X}{\partial n} - F = 0$$

Teneiendo en cuenta que $\frac{\partial X}{\partial n} = \frac{a-c}{(n+1)^2}$, se puede reescribir como:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2 - \frac{(a-c)^2 n}{(n+1)^3} - F &= 0 \\
\frac{(a-c)^2}{(n+1)^3} - F &= 0 \\
n^* &= \frac{(a-c)^{2/3}}{F^{1/3}} - 1
\end{aligned}
$$

Vamos a ver que tenemos demasiada entrada con libre entrada:

$$
\begin{aligned}
n_c &> n^* \\
\frac{a-c}{\sqrt{F}} &> \frac{(a-c)^{2/3}}{F^{1/3}} \\
\left(\frac{a-c}{\sqrt{F}}\right)^{1/3} &> 1
\end{aligned}
$$

Esto se cumple porque

$$\frac{a-c}{\sqrt{F}} > 2$$

6. Resolución Lista VI. Diferenciación.

1. (Cabral pp. 86-7) Supongamos que tenemos el modelo de diferenciación horizontal estudiado en clase con precio regulado p y coste unitario c. Tenemos dos empresas (A y B). Las empresas pueden instalar más de una tienda. El coste de instalarla es de F. Se cumple que:

$$\frac{(p-c)}{4} < F < \frac{(p-c)}{2}$$

Analice el equilibrio del siguiente juego.

En una primera etapa, la empresa A escoge el número de tiendas.

En una segunda etapa, la empresa B escoge el número de tiendas.

Resolución.

Si la empresa A escoge sólo una tienda, su elección óptima será instalarse en la mitad (como en el caso analizado en clase). La empresa B se colocará en el mismo sitio. Cada una obtendrá de beneficio $\frac{(p-c)}{2} - F > 0$.

Pero la empresa A puede preferir instalar dos tiendas para reducir la demanda de la empresa que puede obtener la empresa B instalando una tienda e impedir, en consecuencia, su entrada.

Si la empresa A instala dos tiendas en a_1 y en a_2, la empresa B puede:

- acaparar los consumidores a la izquierda de a_1 obteniendo a_1.

-acaparar los consumidores a la derecha de a_2 obteniendo $1 - a_2$.

-puede colocarse entre las dos tiendas de A, por ejemplo en c. Obtiene: $\frac{a_2+c}{2} - \frac{a_1+c}{2} = \frac{a_2-a_1}{2}$.

La empresa B va escoger la opción que le dé una demanda mayor. La empresa quiere minimizar esa demanda. Es decir quiere:

$$Min_{a_1,a_2}\{a_1, \frac{a_2-a_1}{2}, 1-a_2\}$$

Como para reducir el primer término aumenta el segundo tendrá para minimizar que

$$a_1 = \frac{a_2-a_1}{2} \tag{6.1}$$

Como para reducir el último tiene que aumentar el segundo tendrá para minimizar que:

$$1 - a_2 = \frac{a_2-a_1}{2} \tag{6.2}$$

Resolviendo (6.1) y (6.2) obtenemos las ubicaciones que minimizan la demanda de B.

$$1 - a_1 = a_2$$

$$a_1 = \frac{1 - a_1 - a_1}{2}$$

$$a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{3}{4}.$$

Con estas ubicaciones a la empresa B no le interesa entrar ya que $\frac{(p-c)}{4} - F < 0$.

La empresa A prefiere dos puestos de venta, ya que:

$(p-c) - 2F > \frac{(p-c)}{2} - F$ implica $F < \frac{(p-c)}{2}$ y esto es cierto por hipótesis.

2. Suponga que una población de consumidores se distribuye uniformemente a lo largo de un segmento de longitud 1. Cada consumidor sólo quiere comprar una unidad del bien. Tenemos dos empresas instaladas. La empresa A se encuentra a una distancia z de un extremo y la empresa B se encuentra a una distancia z ($z < \frac{1}{4}$) del otro extremo. El coste unitario de producción es constante e igual para las dos empresas y lo denotamos por c. La función de costes de transporte de cada consumidor se iguala a: $C(t) = td$, donde d es la distancia que tiene que recorrer el consumidor desde su ubicación hasta la tienda.

a) Calcule las funciones de demanda de los bienes que venden las empresas en función de los precios.

b) Calcule los precios que ponen las empresas.

Resolución.

a) Para hallar las demandas buscamos el consumidor indiferente:

$$p_A + t(x - z) = p_B + t(1 - x - z)$$

$$2tx = p_B - p_A + t$$

$$x = \frac{p_B - p_A}{2t} + \frac{1}{2}$$

Esta es la demanda de la empresa A y $1 - x$ es la demanda de la empresa B.

b) El beneficio de la empresa A viene dado por:

$$\Pi_A = (p_A - c)(\frac{p_B - p_A}{2t} + \frac{1}{2})$$

$$\frac{\partial \Pi_A}{\partial p_A} = \frac{p_B - p_A}{2t} + \frac{1}{2} - \frac{p_A - c}{2t} = 0$$

El equilibrio será simétrico $p_B = p_A$ y así obtenemos el precio de equilibrio p:

$$\frac{1}{2} - \frac{p - c}{2t} = 0$$

$$p = c + t$$

El beneficio se equilibrio es:

$$\Pi = \frac{t}{2}$$

3. (Shy (1995)p.165) Suponga que una población de consumidores se distribuye uniformemente a lo largo de un segmento de longitud 1. Cada consumidor sólo quiere comprar una unidad del bien. Tenemos dos empresas instaladas. La empresa A se encuentra en el extremo izquierdo del segmento y la empresa B en el extremo derecho. Como el viento sopla de derecha a izquierda, desplazarse a la izquierda supone un coste $C(d) = d$ pero desplazarse hacia la derecha un coste $C(d) = Rd$, $R > 1$. Calcule el equilibrio en precios si no hay costes de producción.

Solución:

Calculemos en primer lugar el consumidor indiferente:

$$\begin{aligned} p_a + x &= p_b + R(1 - x) \qquad (6.3) \\ x &= \frac{p_b - p_a + R}{1 + R} \end{aligned}$$

El beneficio de las empresas A y B viene dado respectivamente por:

$$\begin{aligned} \pi_a &= x p_a \\ \pi_b &= (1 - x) p_b \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_a}{\partial p_a} &= \left(\frac{1}{1 + R}\right)(p_b - 2p_a + R) = 0 \\ \frac{\partial \pi_b}{\partial p_b} &= \left(\frac{1}{1 + R}\right)(1 + p_a - 2p_b) = 0 \end{aligned}$$

Su solución nos da el equilibrio en precios:

$$p_a^* = \frac{1 + 2R}{3} \text{ y } p_b^* = \frac{2 + R}{3}$$

En equilibrio la empresa A vendería

$$x^* = \frac{1+2R}{3(1+R)}$$

y la empresa B:

$$1 - x^* = \frac{2+R}{3(1+R)}$$

En consecuencia, los beneficios respectivos de A y B son:

$$\pi_a = \frac{(1+2R)^2}{9(1+R)} \text{ y } \pi_b = \frac{(2+R)^2}{9(1+R)}$$

Obsérvese que $\pi_a > \pi_b$ y que $\dfrac{\partial \pi_a}{\partial R} > 0$, $\dfrac{\partial \pi_b}{\partial R} > 0$. Un incremento en R aumenta la diferenciación y estimula los beneficios.

4. (Eaton and Lipsey (1975) Review of Economic Studies; 42(1) p. 27-49). Suponga que los consumidores están uniformemente distribuidos en el segmento de longitud unitaria. El precio del bien está regulado a un nivel P mayor que el coste unitario c. Las empresas deciden donde colocarse (sólo pueden escoger una ubicación). Encuentre el equilibrio si hay 4 empresas en el mercado. (Nota: cuando tenemos más de una empresa en la misma ubicación, dichas empresas se reparten en partes iguales la demanda en esa ubicación).

Solución:

La obtención del equilibrio surge de la observación que no puede ser que en uno de los extremos del segmento tengamos una empresa ubicada en solitario. Siempre ganaría acercándose al competidor. Por otro lado, la misma ubicación para todas las empresas no puede ser de equilibrio. Cada empresa obtendría una demanda de $\frac{1}{4}$ y podría obtener $\frac{1}{2}$ desplazándose hacia el lado grande del mercado. (Hay que hacer notar ques estas dos observaciones también se aplican al caso con 3 empresas y explican que no haya equilibrio en ese caso).

De tal modo que en equilibrio las empresas tienen que estar aparejadas, dos en el punto x y las otras dos en el punto y $(x < y)$. A continuación buscamos los valores de x e y.

Las empresas que están ubicadas en x obtienen la mitad de la demanda en ese punto: $\dfrac{y+x}{4}$. En equilibrio no tienen que querer desviarse ni a la izquierda ni a la derecha. Esto implica respectivamente lo siguiente:

$$\frac{y+x}{4} \geq x$$

$$\frac{y+x}{4} \geq \frac{y-x}{2}$$

La primera condición implica $y \geq 3x$ y la segunda $y \leq 3x$. Por lo tanto entre las dos suponen:

$$y = 3x$$

Las empresas que están ubicadas en y obtienen la mitad de la demanda en ese punto:

$$\frac{1-\frac{y+x}{2}}{2} = \frac{2-y-x}{4}$$

. En equilibrio no tienen que querer desviarse ni a la derecha ni a la izquierda. Esto implica respectivamente lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{2-y-x}{4} &\geq 1-y \\ \frac{2-y-x}{4} &\geq \frac{y-x}{2} \end{aligned}$$

La primera condición implica $3y - x \geq 2$ y la segunda $2 \geq 3y - x$. Por lo tanto, entre las dos suponen:

$$2 = 3y - x$$

De las dos condiciones obtenidas obtenemos que $x = \dfrac{1}{4}$ e $y = \dfrac{3}{4}$.

7. Investigación y Desarrollo.

1. Supongamos que tenemos una industria con demanda $P = a - X$. n empresas simétricas compiten à la Cournot en ese mercado. Sólo una de estas empresas tiene la posibilidad de inventar un producto que volverá obsoleto al actual. La demanda para ese producto vendrá dada por $P = A - X$. Suponga que en ningún caso, hay costes de producción.

Halle la cantidad que gastará la empresa en I+D si maximiza el beneficio esperado y la probabilidad de obtener el invento viene dada por $f(r) = 1 - \dfrac{1}{1+r}$, donde r es el gasto en I+D. ¿ Cómo varía esta cantidad con N ?

Resolución

Si no tiene éxito en sus investigaciones obtendrá $\left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2$. Si lo tiene obtendrá $\left(\frac{A-c}{2}\right)^2$. Es decir sus beneficios esperados de realizar un gasto r en I+D son:

$$E\pi = (1 - \frac{1}{1+r})\left(\frac{A-c}{2}\right)^2 + (\frac{1}{1+r})\left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2$$

Se maximiza en:

$$r = \frac{-2(1+n) + \sqrt{-4a^2 + A^2(1+n)^2}}{2(1+n)}$$

Tenemos que:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{2a^2}{(1+n)^2\sqrt{-4a^2 + A^2(1+n)^2}} > 0$$

El nivel de gasto aumenta con la competencia antes del invento.

2. Tenemos un mercado con demanda $P = 1 - X$. Dos empresas operan en ese mercado. La empresa 1 tiene un coste unitario de 0.1 y la empresa 2 de 0.4. Un laboratorio de investigación dispone de una tecnología que permitirá producir el producto a coste cero. El laboratorio piensa subastar la tecnología. ¿ Qué empresa estará dispuesta a pujar más por la tecnología ? ¿ Tenemos persistencia o sustitución ?

Resolución.

Cada empresa está dispuesta a pujar como máximo la diferencia entre los beneficios que obtendrá con la nueva tecnología y los que obtendrá si es el competidor el que la utiliza. Para poder constestar lo que se nos pregunta hay que calcular dichos beneficios. En ambas situaciones tenemos una empresa con costes nulos y la otra tiene un coste de 0.1, si la empresa 2 gana la subasta, y de 0.4 si, por el contrario, la gana la empresa 1.

Para poder englobar ambos casos vamos a obtener los beneficios para una situación de mercado en que una empresa tiene coste 0 y la otra coste $c > 0$. Si llamamos x a la producción de la empresa eficiente y x_c a la producción de la empresa ineficiente, podemos escribir los beneficios respectivos de la siguiente manera:

$$\Pi = (1 - x - x_c)x \text{ y } \Pi_c = (1 - c - x_c - x)x_c$$

Las condiciones de primer orden de los programas de maximización respectivos son:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 1 - 2x - x_c = 0 \text{ y } \frac{\partial \Pi_c}{\partial x_c} = 1 - c - 2x_c - x = 0$$

Solucionando el sistema tenemos:

$$x = \frac{1+c}{3} \text{ y } x_c = \frac{1-2c}{3}$$

Lo que da lugar a los siguientes beneficios de equilibrio:

$$\Pi = \left(\frac{1+c}{3}\right)^2 \text{ y } \Pi_c = \left(\frac{1-2c}{3}\right)^2$$

Con esta información ya podemos calcular las pujas máximas que estarán dispuestas a realizar las empresas.

Para la empresa 1 será:

$$\left(\frac{1+0.4}{3}\right)^2 - \left(\frac{1-2*0.1}{3}\right)^2 = \frac{1.32}{9}$$

El primer término de la resta son los beneficios si gana la subasta. En ese caso, la empresa 1 tiene coste 0 y el competidor de 0.4. El segundo término representa los beneficios si pierde la subasta. En ese caso, la empresa 1 opera con coste 0.1 y el competidor con coste 0.

Para la empresa 2 será:

$$\left(\frac{1+0.1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1-2*0.4}{3}\right)^2 = \frac{1.17}{9}$$

El primer término de la resta son los beneficios si gana la subasta. En ese caso, la empresa 2 tiene coste 0 y el competidor de 0.1. El segundo término representa los beneficios si pierde la subasta. En ese caso, la empresa 2 opera con coste 0.4 y el competidor con coste 0.

Resulta que la empresa 1 está dispuesta a pagar más por la innovación que la empresa 2 y, en consecuencia, será la que utilizará la nueva tecnología. En este caso, tenemos que la empresa con costes bajos es la que adquiere la nueva tecnología lo que aumenta el diferencial de costes con la empresa ineficiente. Por eso se dice que tenemos persistencia en el liderazgo.